# CAT(0) groups whose boundaries are scrambled sets (General and geometric topology today and their problems)

AUTHOR(S):

保坂, 哲也

数理解析研究所講究録
第 1578 巻 2008 年 52-56



# CAT(0) groups whose boundaries are scrambled sets

宇都宮大学教育学部

保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

本稿では, 力学系の概念である scrambled set (攪拌集合) を群作用に対して自然な拡張として定義し, CAT(0) 群の境界がいつ scrambled set となるかを調べる.

## §1 CAT(0) 群の境界の極小性と攪拌集合について

非正曲率を持つ測地線空間として CAT(0) 空間が定義される. CAT(0) 空間 $X$ およびその境界 $\partial X$ の定義および詳細は [2] に見られる. CAT(0) 空間 $X$ 上に幾何学的に (proper, cocompact, isometry に) 作用する群 $G$ を CAT(0) 群とよぶ.

いま, 群 $G$ が CAT(0) 空間 $X$ 上に幾何学的に作用しているとする. 本稿では, $X$ 上の点 $x_0$ を固定し, 境界 $\partial X$ 上の距離を以下で定義する.

**Definition.** Let $\alpha, \beta \in \partial X$. There exist unique geodesic rays $\xi_{x_0,\alpha}$ and $\xi_{x_0,\beta}$ in $X$ with $\xi_{x_0,\alpha}(0) = \xi_{x_0,\beta}(0) = x_0$, $\xi_{x_0,\alpha}(\infty) = \alpha$ and $\xi_{x_0,\beta}(\infty) = \beta$. Then the metric $d_{\partial X}(\alpha, \beta)$ of $\alpha$ and $\beta$ on $\partial X$ (with respect to the basepoint $x_0$) is defined by

$$d_{\partial X}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \min\{d(\xi_{x_0,\alpha}(i), \xi_{x_0,\beta}(i)),\ \frac{1}{2^i}\}.$$

ここで定義された距離は, 当然 $x_0$ に依存するが, 境界 $\partial X$ の位相は $x_0$ に依らず, よく知られている cone topology となる.

いま, 群 $G$ は境界 $\partial X$ 上に同相によって作用する. ここで, minimality (極小性) および scrambled set (攪拌集合) を以下で定義する.

**Definition.** The boundary $\partial X$ is said to be *minimal*, if any orbit $G\alpha$ is dense in $\partial X$. Also the boundary $\partial X$ is called a *scrambled set*, if for any $\alpha, \beta \in \partial X$ with $\alpha \neq \beta$,

$$\limsup\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} > 0 \text{ and}$$
$$\liminf\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} = 0.$$

ここで定義された "minimality" および "scrambled set" は, 力学系の概念の自然な拡張である. 一般に, 境界 $\partial X$ およびそこへの群 $G$ の作用は, 非常に複雑で難解であり, その複雑な対象から何らかの情報を得ることが, "minimality" および "scrambled set" といった力学系の概念を導入した動機である.

いくつかの議論により, 実際には,

$$\limsup\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} > 0$$

は常に成立することがわかり, scrambled set となるかどうかは, 実は,

$$\liminf\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} = 0$$

の条件が成立するかどうかにかかっていることがわかる.

本稿では, 境界がいつ scrambled set となるのか, また, いつ minimal となるのか, を中心に考えていく.

## §2 Hyperbolic の場合

まず, CAT(0) 空間が (Gromov) hyperbolic の場合について得られた結果を述べる.

**Theorem 1.** *Suppose that a group $G$ acts geometrically on a CAT(0) space $X$ and $|\partial X| > 2$. If $X$ is hyperbolic, then the boundary $\partial X$ is a scrambled set and minimal. Moreover there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\limsup\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} > c$$

*for any $\alpha, \beta \in \partial X$ with $\alpha \neq \beta$.*

ここで, 力学系の "expansive" という概念を導入する.

**Definition.** An action of a group $G$ on a metric space $Y$ by homeomorphisms is said to be *expansive*, if there exists a constant $c > 0$ such that for each pair $y, y' \in Y$ with $y \neq y'$, there is $g \in G$ such that $d(gy, gy') > c$.

ここで, 次の定理を得た.

**Theorem 2.** *Suppose that a group $G$ acts geometrically on a CAT(0) space $X$ and $|\partial X| > 2$. The action of $G$ on $\partial X$ is expansive if and only if the space $X$ is hyperbolic.*

## §3 境界が SCRAMBLED SET となる CAT(0) 群について

境界が scrambled set となる CAT(0) 群の条件としては, 例えば, 以下の結果を得ている.

**Theorem 3.** *Suppose that a group $G$ acts geometrically on a CAT(0) space $X$. If there exists an element $g_0 \in G$ such that*

(1) *$Z_{g_0}$ is finite,*

(2) *$X \setminus F_{g_0}$ is not connected, and*

(3) *each component of $X \setminus F_{g_0}$ is convex and not $g_0$-invariant,*

*then the boundary $\partial X$ is a scrambled set and minimal, where $Z_{g_0}$ is the centralizer of $g_0$ and $F_{g_0}$ is the fixed-point set of $g_0$ in $X$, that is,*

$$Z_{g_0} = \{g \in G \mid gg_0 = g_0 g\} \text{ and}$$
$$F_{g_0} = \{x \in X \mid g_0 x = x\}.$$

また, 境界が scrambled set とならない CAT(0) 群の条件として, 以下を得ている.

**Theorem 4.** *Suppose that a group $G$ acts geometrically on a CAT(0) space $X$ and $|\partial X| > 2$. If $X$ contains a quasi-dense subset $X_1 \times X_2$ such that $X_1$ and $X_2$ are unbounded, then the boundary $\partial X$ is not a scrambled set.*

ここで, $A \subset X$ が $X$ において *quasi-dense* であるとは, 「$A$ をある constant $c > 0$ だけ太らせたものが $X$ を覆える (すなわち $B(A, c) = X$)」によって定義する.

このように, CAT(0) 空間 $X$ の本質的な部分が積に分解するとき, その境界 $\partial X$ は scrambled set とはならない. 一方で, この逆が成立するかは, 未解決な問題である.

## §4 RIGHT-ANGLED COXETER 系の境界について

Coxeter 系 $(W, S)$ から, Davis 複体とよばれる CAT(0) 空間 $\Sigma(W, S)$ が定義される ([6], [7], [8], [25]). このとき, Coxeter 群 $W$ は Davis 複体 $\Sigma(W, S)$ 上に幾何学的に自然に作用する. Davis 複体の境界 $\partial\Sigma(W, S)$ を Coxeter 系 $(W, S)$ の境界

とよぶ. Coxeter 群 $W$ の任意の元の位数が 2 か $\infty$ のとき, $(W,S)$ を right-angled Coxeter 系, $W$ を right-angled Coxeter 群とよぶ.

ここで, right-angled Coxeter 系の境界に関して, 以下の非常に強い結果を得た.

**Theorem 5.** *If $(W,S)$ is an irreducible right-angled Coxeter system and $|\partial\Sigma(W,S)| > 2$, then the boundary $\partial\Sigma(W,S)$ is a scrambled set and minimal.*

**Theorem 6.** *Let $(W,S)$ be a right-angled Coxeter system with $|\partial\Sigma(W,S)| > 2$. Then the following statements are equivalent:*

(1) *$\partial\Sigma(W,S)$ is a scrambled set.*
(2) *$\partial\Sigma(W,S)$ is minimal.*
(3) *Any finite index subgroup of $W$ does not split as a product of infinite subgroups.*

このように, right-angled Coxeter 系の境界に関しては, いつ scrambled set となるのか, また, いつ minimal となるのか, がはっきりとわかった. 今後は, より一般の Coxeter 系の境界および CAT(0) 群の境界に関して取り組みたい.

## References


[1] N. Bourbaki, *Groupes et Algebrès de Lie*, Chapters IV-VI, Masson, Paris, 1981.

[2] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[3] K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, 1980.

[4] M. Coornaert and A. Papadopoulos, *Symbolic dynamics and hyperbolic groups*, Lecture Notes in Math., Vol. 1539, Springer, Berlin, 1993.

[5] C. B. Croke and B. Kleiner, *Spaces with nonpositive curvature and their ideal boundaries*, Topology **39** (2000), 549–556.

[6] M. W. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983), 293–324.

[7] M. W. Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, in Handbook of geometric topology (Edited by R. J. Daverman and R. B. Sher), pp. 373–422, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[8] M. W. Davis, *The cohomology of a Coxeter group with group ring coefficients*, Duke Math. J. **91 (no.2)** (1998), 297–314.

[9] E. Ghys and P. de la Harpe (ed), *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progr. Math. vol. 83, Birkhäuser, Boston MA, 1990.

[10] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in Essays in group theory (Edited by S. M. Gersten), pp. 75–263, M.S.R.I. Publ. 8, 1987.

[11] T. Hosaka, *Parabolic subgroups of finite index in Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra **169** (2002), 215–227.

[12] T. Hosaka, *Dense subsets of the boundary of a Coxeter system*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 3441–3448.

[13] T. Hosaka, *The interior of the limit set of groups*, Houston J. Math. **30** (2004), 705–721.

[14] T. Hosaka, *On dense orbits in the boundary of a Coxeter system*, J. Math. Kyoto Univ. **45 (no.3)** (2005), 627–631.

[15] T. Hosaka, *Reflection groups of geodesic spaces and Coxeter groups*, Topology Appl. **153** (2006) 1860–1866.

[16] T. Hosaka, *Dense subsets of boundaries of CAT(0) groups*, Houston J. Math., to appear.

[17] T. Hosaka, *On splitting theorems for CAT(0) spaces and compact geodesic spaces of non-positive curvature*, arXiv:math.GR/0405551 (2004).

[18] T. Hosaka, *Minimality of the boundary of a right-angled Coxeter system*, arXiv:math.GR/0606020 (2006).

[19] T. Hosaka, *CAT(0) groups and Coxeter groups whose boundaries are scrambled sets*, preprint, 2007.

[20] W. Huang and X. Ye, *Homeomorphisms with the whole compacta being scrambled sets*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **21** (2001), 77–91.

[21] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.

[22] H. Kato, *On scrambled sets and a theorem of Kuratowski on independent sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 2151–2157.

[23] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985–992.

[24] N. Monod, *Superrigidity for irreducible lattices and geometric splitting*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), 781–814.

[25] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, Ohio State University, 1988.

[26] D. Radcliffe, *Unique presentation of Coxeter groups and related groups*, Ph.D. thesis, University of Wisconsin-Milwaukee, 2001.

[27] K. Ruane, *Dynamics of the action of a CAT(0) group on the boundary*, Geom. Dedicata **84** (2001), 81–99.

[28] J. Tits, *Le problème des mots dans les groupes de Coxeter*, Symposia Mathematica, vol. 1, pp. 175–185, Academic Press, London, 1969.